Introduction au langage de la logique des prédicats

Louis Rouillé
louis.rouille@univ-paris1.fr

Novembre 2021

Sommaire

Page

1 Limites de la logique propositionnelle

Def: Le *pouvoir d'expression* d'un langage artificiel, c'est la mesure de la possibilité de traduire telle ou telle phrase dans ce langage. Le pouvoir d'expression d'un langage est donc relatif à un autre langage.

- **Rq**$_1$: Un langage naturel, par définition, a un pouvoir d'expression maximum. On suppose en général que tous les langages naturels ont le même pouvoir d'expression.

- **Rq**$_2$: La logique propositionnelle a un pouvoir d'expression relativement faible mais pas nul. La logique des prédicats, que l'on va introduire ici, a un pouvoir d'expression assez faible, mais plus grand que celui de la logique propositionnelle.

Objectif: On va montrer comment on peut *enrichir* la logique propositionnelle de façon à arriver progressivement à la logique des prédicats.

1.1 Retour sur les objectifs de la logique propositionnelle

1.1.1 Rappel

La *logique propositionnelle* (ou calcul des énoncés) se donne pour objectif de formaliser les relations entre des phrases, ou énoncés.

- L'objet de la logique propositionnelle, c'est donc les différentes manières d'articuler des phrases entre elles.

- Ces différentes manières d'articuler des phrases correspondent aux différentes *conjonctions de coordinations* qui existent dans le langage naturel ("et", "ou", "mais", "puisque", "si", "tandis que"...)

- Comme nous faisons de la *logique* (et non de la grammaire), ce qui nous intéresse c'est la *vérité* et la *fausseté*.

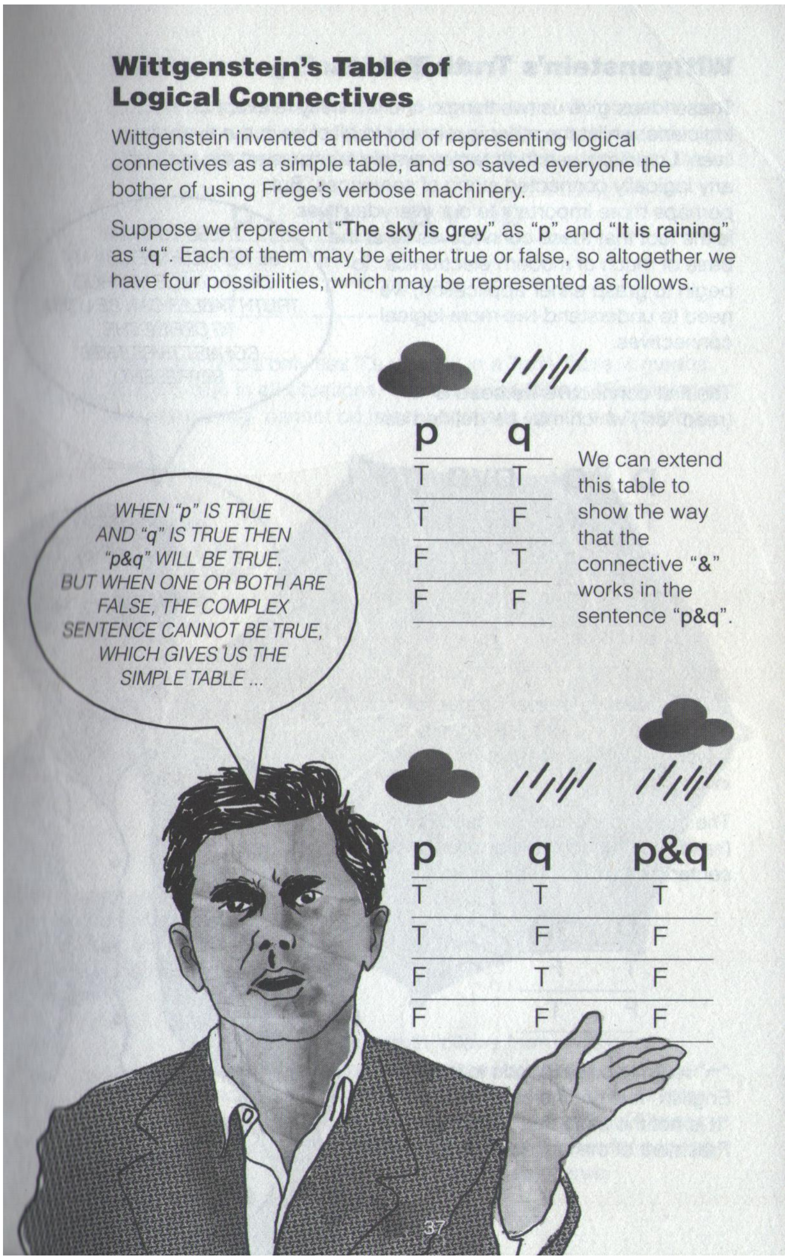
  – L'objet de la logique propositionnelle, c'est donc les différentes manières de composer les phrases *en tant qu'elles sont vraies ou fausses*.

- Pour ce faire, on définit les *connecteurs logiques* explicitement, à l'aide des tables de vérité.

  – On a par exemple donné la liste exhaustive des manières de combiner la valeur de vérité de deux phrases: c'est la liste des connecteurs binaires.

– La logique propositionnelle est le système formel qui comprend les connecteurs suivants: $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$.

Pause graphique: Les pages suivantes sont tirées de (Dan Cryan 2004). Vous y apprendrez que les tables de vérités viennent du travail de Wittgenstein, et le lien entre connecteurs logiques et informatique que j'ai déjà suggéré en cours y est explicité. Ce livre est écrit dans un anglais très accessible.



Wittgenstein's Table of Logical Connectives

Wittgenstein invented a method of representing logical connectives as a simple table, and so saved everyone the bother of using Frege's verbose machinery.

Suppose we represent "**The sky is grey**" as "p" and "**It is raining**" as "q". Each of them may be either true or false, so altogether we have four possibilities, which may be represented as follows.

p	q
T	T
T	F
F	T
F	F

We can extend this table to show the way that the connective "**&**" works in the sentence "**p&q**".

WHEN "p" IS TRUE AND "q" IS TRUE THEN "p&q" WILL BE TRUE. BUT WHEN ONE OR BOTH ARE FALSE, THE COMPLEX SENTENCE CANNOT BE TRUE, WHICH GIVES US THE SIMPLE TABLE ...

p	q	p&q
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

37

Wittgenstein's Truth Tables

These ideas give us two things: one is mostly relevant to logicians, whilst the other is relevant to all of us in our everyday lives. Logicians use truth tables simply to represent the truth of any logically connected string of sentences. But perhaps more important to our everyday lives is the fact that these connectives lie at the base of much of modern electronics. To begin to grasp either application, we need to understand two more logical connectives.

The first connective we need is "v" (read "**or**") which may be defined as ...

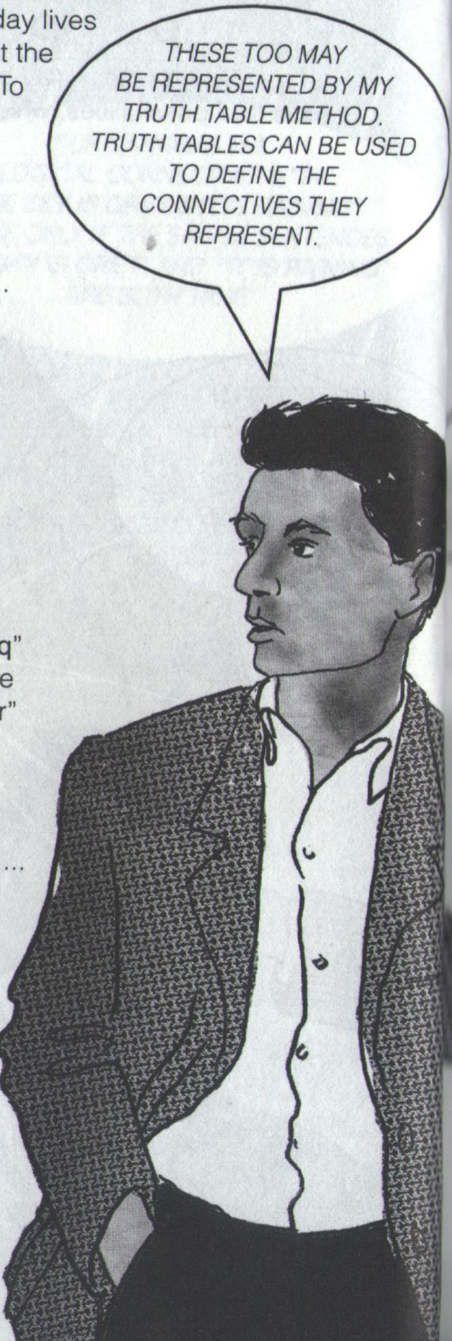
p	q	pvq
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

This connective is true if either "**p**" or "**q**" is true and it is only false when both are false. It roughly corresponds to "and/or" in English.

The other connective we need is "¬" (read "**not**") which only applies to one sentence. Its Truth Table looks like this ...

p	¬p
T	F
F	T

"¬" roughly corresponds to the English "**It is not the case that**", as in "It is not the case that Clinton is President of the United States."

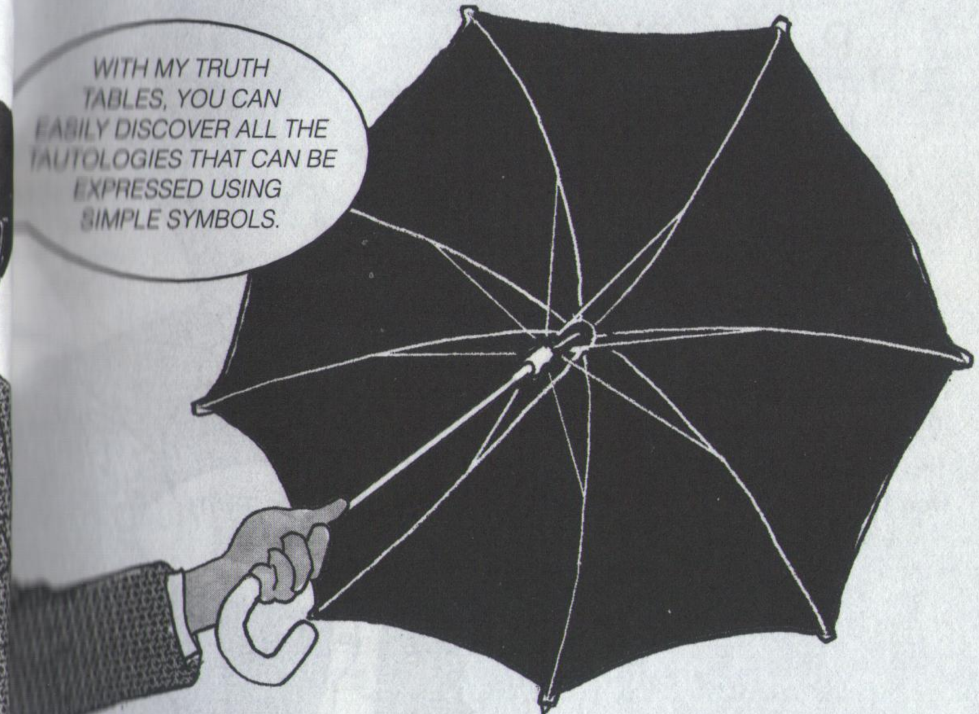


Discovering Tautologies

Logical symbols may be used in combination, which can help us calculate the truth condition of any logically complex sentences. For example, "**p v ¬p**", which produces the following Truth Table:

p	¬p	p v ¬p
T	F	T
F	T	T

When a formula only has **T**'s under it in a Truth Table, it means that it is true in all situations. The sentence "**Either it is raining or it is not raining**" cannot be false. Logicians call this a *tautology.*

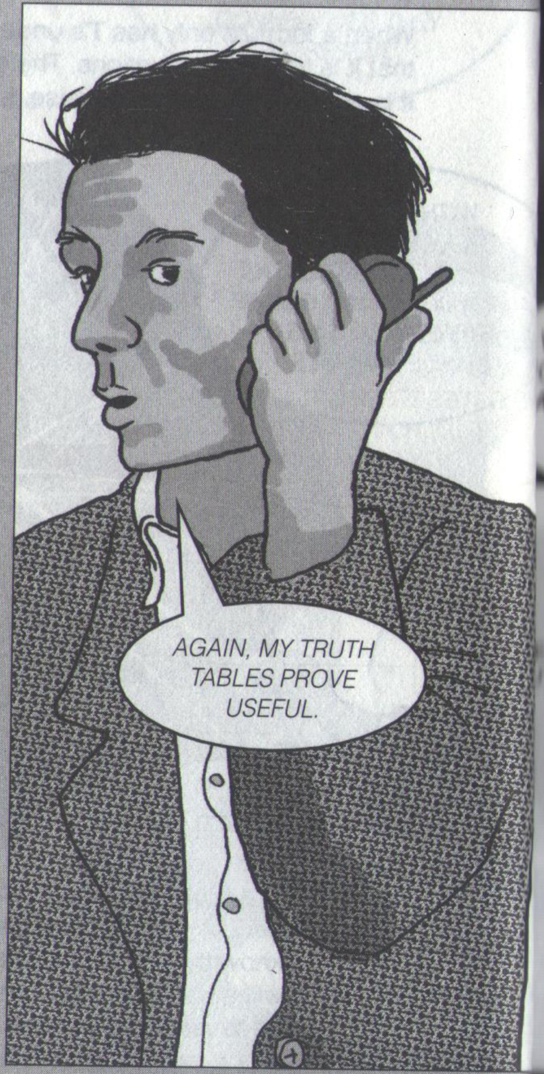


In a tautology, one truth follows from another of necessity only because of the logical syntax. So we know that any sentence with the same logical syntax will always be true. This is important to Proof Theory because it provides us with a sound base for proving that a logical argument is necessarily true.

The Logic Gates of Digital Electronics

Modern life would be unrecognizable without digital electronics and digital electronics is not a lot more than an instantiation of logic. Digital electronics can be found everywhere from microwaves to mobile phones. Digital electronics relies on **"logic gates"** – basically switches – that let current through, depending on their input. For example, an "And Gate" has *two inputs* and *one output* but will only let current through if there is current at both of the inputs. The behaviour of an And Gate may be represented as follows ...

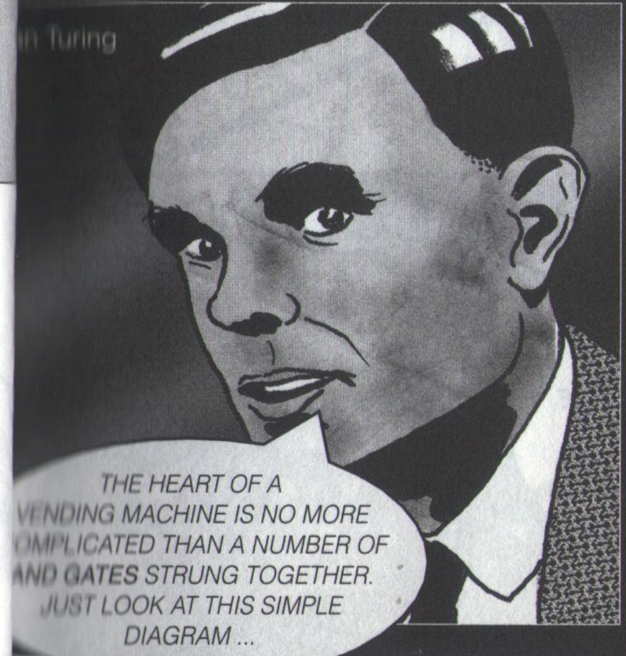
Input 1	Input 2	Output
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

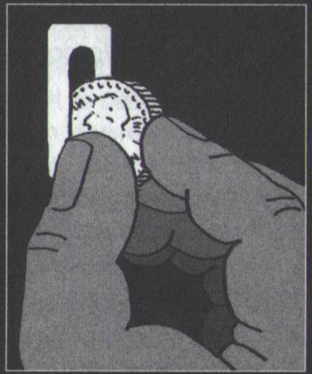


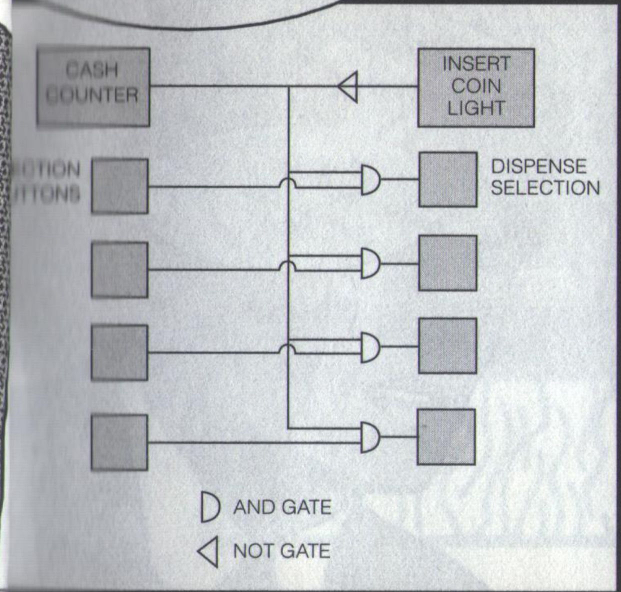
An **And Gate** has exactly the same Truth Table as the logical connective "**&**". Just as the meaning of the sentences was unimportant when looking at the behaviour of "**&**", so the amount of current is unimportant to the behaviours of **And Gates**. Pretty much all digital electronics is constructed out of "**And Gates**", "**Or Gates**" and "**Not Gates**", which correspond to the logical connectives "**&**", "**v**" and "**¬**". They are immensely powerful tools based on logic.

A Vending Machine

Just as logical formulae are constructed out of logical connectives, so logic gates may be used to construct devices like vending machines and ATM's.



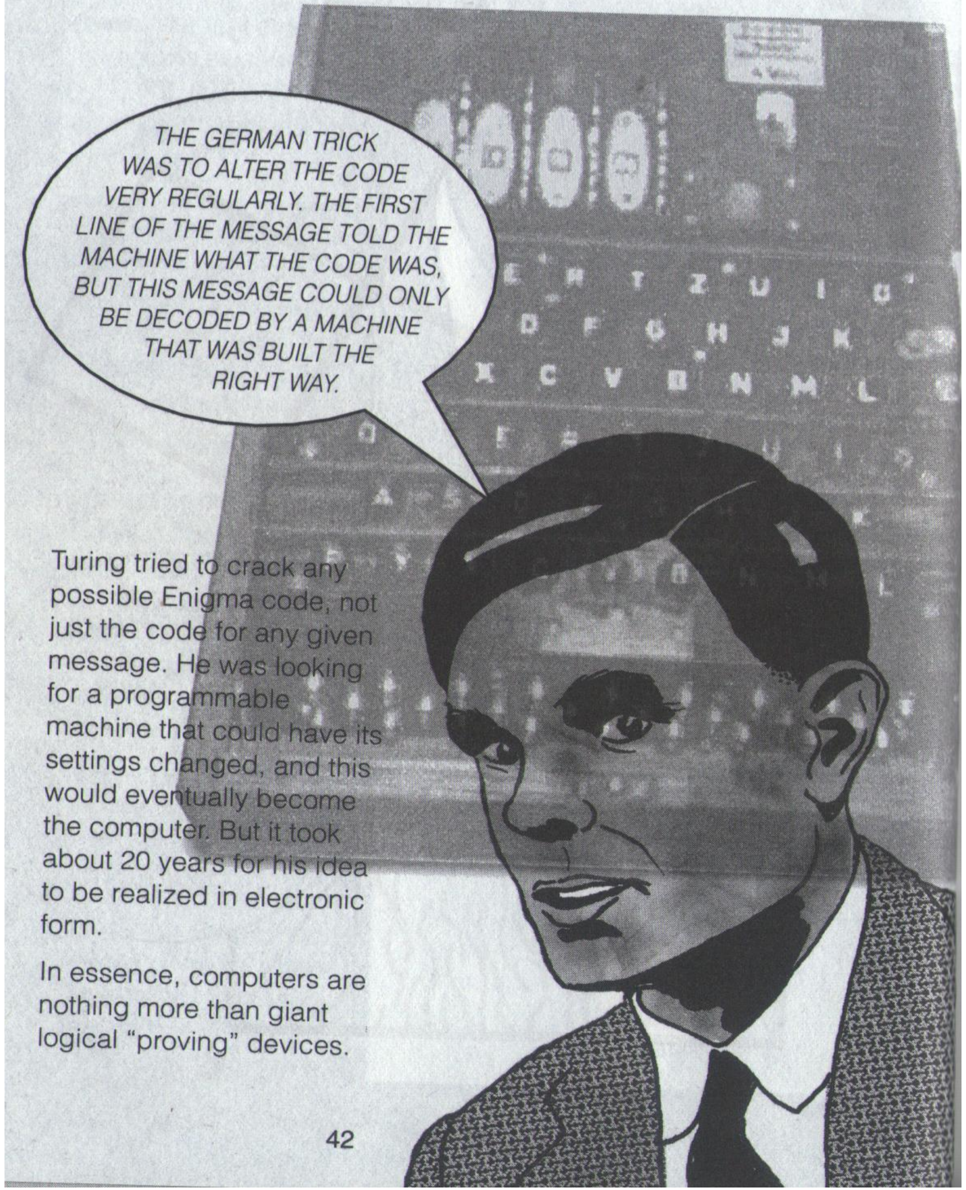




The cash counter is a simple device that checks if there is enough money in the machine. When there is enough money it gives out a signal "**1**", the rest of the time it outputs "**0**". If the output is "**0**" then the Not Gate will reverse it and turn on the "insert coin" light. If the cash counter outputs "**1**" then the Not Gate would turn off the "insert coin" light, and each of the And Gates receives one input at "**1**". When a product is selected, the corresponding And Gate's second input becomes "**1**" and it now gives out a "**1**" signal, releasing the product of choice.

Turing and the "Enigma Code"

The actions of the vending machine follow necessarily from the actions of the buyer. We can also see the actions of the machine as the proof of a given formula. This idea predates logic gates. It comes from **Alan Turing**'s (1912–54) attempts to crack the Enigma Machine, an ingenious German encryption device that was thought foolproof in World War II.



Turing tried to crack any possible Enigma code, not just the code for any given message. He was looking for a programmable machine that could have its settings changed, and this would eventually become the computer. But it took about 20 years for his idea to be realized in electronic form.

In essence, computers are nothing more than giant logical "proving" devices.

1.1.2 Les connecteurs ne sont pas les conjonctions de coordinations

Rq: Il est important de souligner que la formalisation (i.e. l'intérêt exclusif pour la vérité et la fausseté des phrases) élimine d'emblée des phénomènes linguistiques intéressants, des nuances de sens présentes dans le langage naturel.

Ex: La conjonction de coordination française "et" et le connecteur logique "$\wedge$" ne sont pas identiques. Pour preuve:

- Le connecteur logique $\wedge$ est commutatif.
  - Cela signifie que, pour toute formule: $A \wedge B$, c'est la même chose que $B \wedge A$.
  - En effet, les deux formules ont exactement les mêmes tables de vérité.
- En revanche, la conjonction de coordination "et" n'est pas du tout commutative.
  - Considérez par exemple ces deux phrases:

    (1) Ils se marièrent et eurent beaucoup d'enfants.

    (2) Ils eurent beaucoup d'enfants et se marièrent.
  - (1) peut se trouver à la fin d'un conte pour enfant dans une culture puritaine sans aucun soucis. En revanche, ce serait bizarre de trouver (2) dans un même contexte puritain.
  - Pourquoi?
    - (1) suggère très fortement que les enfants sont nés *après* le mariage;
    - (2), au contraire, suggère très fortement que les enfants sont nés hors-mariage et que le mariage a eu lieu *parce que* les parents ont fauté, si j'ose dire.
  - (1), ce n'est donc pas la même chose que (2).
- **Csq**: "et" et "$\wedge$", ce n'est pas la même chose.

1.1.3 Exercice

Appliquez le même raisonnement aux autres connecteurs, et montrez que:

- "$\vee$", ce n'est pas la même chose que "ou".
- "$\rightarrow$", ce n'est pas la même chose que "si ..., alors ...".
- "$\neg$", ce n'est pas la même chose que "ne ... pas".

1.1.4 Pour aller plus loin

- La question de savoir si la logique propositionnelle a tout de même un intérêt pour une étude linguistique[1] ou cognitive[2] des conjonctions de coordinations est une question de recherche ouverte.
  - Si ce genre de question vous intéresse, vous pouvez prendre des cours d'introduction à la linguistique ou de théorie du raisonnement.
- Une réponse simple consiste à dire que la logique propositionnelle donne la *signification* des connecteurs (niveau sémantique), et qu'on module cette signification en situation, du fait de *l'usage* qu'on en fait (niveau pragmatique).
  - Pour un superbe et célébrissime article concernant l'articulation de ces deux niveaux sémantique et pragmatique, voir (Grice 1975).

1.2 Rentrer dans la structure des énoncés

1.2.1 Problème de traduction

Supposons qu'en cette période d'effondrement climatique vous lisiez *la Guerre des Gaules*, écrite par Julius César. Vous tentez de résumer cette œuvre à une personne qui n'en a jamais entendu parler. Il faut aller à l'essentiel. Vous dites donc à votre interlocuteur:

(3) César a vu, César est venu, César a vaincu.[3]

[1] Sur les règles de grammaires liées à ces mots.
[2] Sur la manière dont on utilise ces conjonctions dans le raisonnement ordinaire.
[3] Sous-entendu: les Gaules.

1.2.2 Déception de la logique propositionnelle

Supposons maintenant que votre interlocuteur ne comprenne que la logique propositionnelle.[4] Comment traduire (3) en logique propositionnelle?

- Vous donnez vos conventions de traduction:
  - p: "César a vu"
  - q: "César est venu"
  - r: "César a vaincu"
- Vous remarquez que la manière d'articuler ces trois énoncés est manifestement une conjonction: "César a vu et il est venu et il a vaincu."
- Vous obtenez finalement:

  (4) $p \wedge q \wedge r$

Rq: Cette traduction est très décevante... Pourquoi?

- Je ne fais pas référence au fait que "$\wedge$" n'est pas une bonne traduction de "et" en général, par exemple à cause de la commutativité de $\wedge$. Il y a bien plus grave...
- (4) rate quelque chose d'essentiel dans (3): à savoir qu'il y a quelque chose de commun aux trois conjoints.
  - C'est *César*.
- Or, si l'on regarde uniquement (4), on ne voit que trois énoncés distincts p, q et r, qui n'ont a priori rien en commun.
- **Pb**: Comment "rentrer dans la structure des énoncés"?
  - Afin de voir que ces énoncés sont en effet différents du point de vue des valeurs de vérité;
  - et ont quelque chose en commun, à savoir le fait qu'ils parlent tous les trois de la même personne.
- **Solution**: utiliser la logique des prédicats.

[4] Ça peut arriver...

2 L'idée fondamentale de la logique des prédicats

Vous avez peut-être pensé à répondre autrement au problème posé... Une réponse intuitive et spontanée consiste à mobiliser des connaissances grammaticales de base. *César* est en effet le *sujet grammatical* de chacun des énoncés. C'est précisément ce que les trois énoncés ont en commun: ils ont le même sujet.

C'est une bonne intuition. Mais ce n'est pas une intuition *logique*: c'est une intuition *grammaticale*.

Il s'agit de réorienter son regard pour chercher ce qu'il y a de commun au niveau de la structure *logique* des trois énoncés. La *structure logique*, nous allons le voir, ressemble parfois à la *structure grammaticale*, mais ça n'est pas du tout la même chose. Pour s'en convaincre, il faut suivre un moment l'*intuition mathématique* de Frege.[5]

2.1 L'intuition mathématique

Voici la citation pertinente dans (Frege 1971), p. 91:

> On peut envisager de décomposer les propositions affirmatives [i.e. les énoncés] comme les équations, les inéquations, et les expressions analytiques, en deux parties dont l'une est fermée sur soi et l'autre réclame un complément, est insaturée. On analysera par exemple la proposition
>
> "César conquit les Gaules"
>
> en "César" et "conquit les Gaules". La seconde partie est insaturée, elle traîne une place vide avec elle, et ce n'est qu'après avoir rempli cette place par un nom propre ou une expression qui représente un nom propre qu'on voit naître un sens fermé sur lui-même. J'appelle ici **fonction** la dénotation de la partie insaturée. Dans ce cas l'**argument** est César.

- *L'intuition mathématique*, c'est de considérer un énoncé comme une **fonction**.

[5]**Note historique**: L'intuition grammaticale a dominé la logique depuis les travaux d'Aristote jusqu'à la fin du XIXe siècle. Frege a formulé pour la première fois l'idée fondamentale de la logique des prédicats, dans la *Begriffsschrift* (mot qui signifie en français quelque chose comme "notation conceptuelle") publiée en 1879. Frege était un mathématicien de formation. Vous trouverez un exposé qui retrace la biographie intellectuelle de Frege ici. Pour une présentation biographique des logiciens des débuts de la logique moderne, je conseille aussi le célèbre roman graphique Logicomix (que vous pourrez trouver ici, en anglais, si ça vous intéresse).

  - Pour celles et ceux qui savent ce que c'est qu'une fonction, c'est tout à fait éclérant! Mais pour les autres...
    * ... il faut penser à quelque chose qui contient un trou (i.e. *insaturé*).
    * Et qu'on peut donc remplir (i.e. *saturer*).
  - Ce qui bouche le trou d'une fonction, c'est ce qu'on appelle un **argument**.

- L'analogie entre fonction mathématique et énoncé est vraiment fondamentale.
  - On va d'ailleurs utiliser quasiment les mêmes notations qu'en mathématiques pour la logique des prédicats.
  - **Vocabulaire**: Plutôt que de prédicats, on parle parfois de fonctions propositionnelles.

2.2 Fonction et prédicat

2.2.1 Définitions

Rq: Je glose le début de (Frege 1971) dans cette section. N'hésitez pas à lire l'article pour plus de détails (vous le trouverez dans l'espace de cours en ligne).

- Prenons la fonction: $f(x) = 2x + 1$.
  - En réalité, c'est une opération arithmétique complexe (il y a une multiplication et une addition) avec un trou, i.e. une *place vide* là où il y a le x.
  - Cette notation signifie simplement que si on remplace le x par un nombre, on peut faire l'opération qui correspond à la fonction.
    * Remplacer le x par un nombre, c'est donner un argument à f.[6]
    * Par exemple, pour $x = 2$, on obtient: $f(2) = 2.2 + 1 = 5$.[7]
- Un *prédicat*, c'est une fonction propositionnelle qu'on note généralement: $P(x)$ (ou simplement Px).[8]

[6] On dit aussi *appliquer* la fonction f à un argument. Pour cette raison, les fonctions sont parfois appelées des *applications*.

[7] Manifestement, j'utilise "." pour symboliser la multiplication. C'est parce que je vais utiliser le symbole "×" pour autre chose plus tard...

[8] P pour "prédicat", naturellement. L'usage est ainsi de distinguer les variables de prédicat P, Q, R, ... et les variables propositionnelles p, q, r, ...

- x est ici aussi une place vide, et il s'agit bien d'appliquer P à un argument.
- **Cependant**$_1$, l'application n'est pas une opération arithmétique.
  - L'opération est *sémantique*, elle correspond à ce qu'on appelle la *prédication*.[9]
  - Ça correspond à l'opération mentale que l'on fait fait quand on *attribue* une *propriété* à un *objet*, pour utiliser un vocabulaire traditionnel en philosophie.
    - En vocabulaire courant, cela correspond à *dire* quelque chose *de* quelque chose.
  - **À retenir**: un prédicat *exprime* une propriété (tout comme un énoncé *exprime* une proposition).
    - **ex**: "être romain" est un prédicat qui exprime la propriété d'être romain.
    - Attribuer la propriété d'être romain à César, c'est dire de César qu'il possède la propriété d'être romain.
- **Cependant**$_2$, l'argument n'est pas un nombre.
  - L'argument typique d'un prédicat, c'est un individu.
  - Pour être plus précis, on a besoin d'un individu qui a un nom propre (comme César).

• **Exemple**:

  - Notons V_1x le prédicat "avoir vu"; V_2 le prédicat "être venu"; V_3 le prédicat "avoir vaincu".
  - Prenons César comme individu, on le nomme c.
  - On peut maintenant traduire (3) en logique des prédicats:

(5) $V_1(c) \wedge V_2(c) \wedge V_3(c)$

• Naturellement, on peut introduire autant de prédicats qu'on veut et autant d'individus qu'on veut.

  - **ex**: "César est romain" va se traduire: Rc (avec Rx: "x est romain")
  - **ex**: "Rouillé est romain" va se traduire: Rr (avec r: "Louis Rouillé")

[9] On utilise parfois le verbe "prédiquer".

2.2.2 Exercice

Traduisez les phrases suivantes en logique des prédicats en précisant vos conventions de traduction.[a]

- Théétète est assis.
- Théétète vole dans les airs.
- Théétète est assis et ne vole pas dans les airs.
- Si l'Étranger a raison, alors soit Théétète est assis soit Théétète vole dans les airs.
- Soit l'Étranger a raison soit il n'a pas raison, puisque soit Théétère vole dans les airs, soit il ne vole pas dans les airs.
- Théétète est un philosophe.
- Théétète est un jeune philosophe.

[a] Ces phrases font référence au passage celèbre du *Sophiste* de Platon (262e-263b) sur la définition de la prédication. J'en conseille vivement la lecture, et j'ai mis un scan de ce passage dans l'espace de cours en ligne.

2.2.3 Les univers de discours

- Reprenons notre fonction f, et utilisons une autre notation familière. Au lieu de $f(x) = 2x+1$, on écrit parfois:

$$f : x \longmapsto 2x+1$$

  - Cela signifie que la fonction f *prend* un nombre x et *renvoie* le nombre correspondant $2x+1$. En ce sens, f fait des couples de nombres.[10]
    - Ces couples, c'est ce qui permet, par exemple, de faire le *graphe* de f, en dessinant la courbe correspondant à ces couples que forme la fonction f.
  - **Def**: Les éléments que peut *prendre* une fonction (i.e. ses arguments) constituent un ensemble que l'on appelle le *domaine* de f.
  - **Def**: Les éléments que peut *renvoyer* une fonction (i.e. ses résultats) constituent un ensemble que l'on appelle le *co-domaine* de f.

[10] C'est même la définition d'une fonction: c'est une faiseuse de couples.

- C'est de là que vient la notation précédente, en général on écrit pour toute fonction f:

$$f : \text{Domaine} \longmapsto \text{Co-domaine}$$

- **ex**: le domaine de notre fonction f ça peut être l'ensemble des nombres réels, qu'on note $\mathbb{R}$; mais ça peut être aussi l'ensemble des nombres entiers, qu'on note $\mathbb{N}$.

  - L'usage, c'est de noter x, y, z les nombres réels; et n, m, k les nombres entiers.
    - $\star$ Donc implicitement, dans mon exemple, le domaine de f, c'est plutôt $\mathbb{R}$;
    - $\star$ mais pas nécessairement, car c'est seulement une convention d'usage.
  - Selon le domaine que l'on choisit, on définit des fonctions très différentes, bien que les opérations arithmétiques sous-jacentes soient les mêmes.
    - $\star$ Il faut donc distinguer:

$$f_1 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$$

et

$$f_2 : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{N}$$

car ces deux fonctions ne s'appliquent pas aux mêmes nombres.

- **Rq**$_1$: Le domaine et le co-domaine d'une fonction n'est pas nécessairement le même, comme ici.

  - **ex**: prenons la fonction g qui a pour domaine $\mathbb{N}$ et définie comme suit: $g(x) = \sqrt{x}$.
    - $\star$ Les racines des nombres entiers ne sont, en général, pas des nombres entiers, mais des nombres réels.[11]
    - $\star$ Ainsi le co-domaine de g n'est pas $\mathbb{N}$, mais $\mathbb{R}$.
    - $\star$ On a donc:

$$g : \mathbb{N} \longmapsto \mathbb{R}$$

- **Rq**$_2$: Le domaine et le co-domaine d'une fonction peuvent être arbitrairement bizarres.

[11] Pensez par exemple à $\sqrt{2}$: c'est ce qui a beaucoup traumatisé les pythagoriciens il y a longtemps déjà.

  - **ex**: prenons la fonction inverse: $h(x) = \frac{1}{x}$
  - Vu qu'on ne peut pas diviser par 0, il faut enlever 0 du domaine de h. Le domaine de h est donc $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ (ce que l'on note parfois $\mathbb{R}^*$).[12]

- Tout dépend donc du type d'opération que l'on fait: il y en a qui changent le domaine, d'autres pas; il y en a qui opère sur tout un domaine disponible, d'autres pas.

Question: Par analogie, quels sont les domaine et co-domaine d'un prédicat?

- Les arguments des prédicats, ce sont les individus nommés qui correspondent au prédicat.
  - Le domaine d'un prédicat, c'est donc un ensemble d'individus.
  - On appelle cet ensemble l'*univers de discours*: c'est l'ensemble des individus dont on a besoin pour rendre compte d'un ensemble de phrases en logique des prédicats.[13]
  - Voici la belle définition de cette notion dans le livre de George Boole 1854 *The Laws of Thought*:

    > Dans chaque discours, qu'il s'agisse de l'esprit qui parle avec ses propres pensées ou d'un individu dans ses rapports avec les autres, il y a une limite supposée ou exprimée à l'intérieur de laquelle le discours opère. Le discours le plus libre est celui dans lequel les mots que nous utilisons sont entendus dans leur acception la plus large possible, et pour eux les limites du discours sont co-extensives avec celles de l'univers lui-même. Mais le plus souvent, nous nous limitons à un champ moins vaste. Parfois, dans le discours des hommes, nous laissons entendre (sans en exprimer la limite) que c'est uniquement des hommes dans certaines circonstances et conditions que nous parlons, comme par exemple des hommes civilisés, ou des hommes dans la vigueur de la vie, ou des hommes sous une autre condition ou relation. Or, quelle que soit l'étendue du champ dans lequel se trouvent tous les objets de notre discours, ce champ peut à juste titre être appelé l'univers du discours. En outre, cet univers du

[12] Le symbole "\" signifie "privé de". On l'utilise uniquement entre deux ensembles.

[13] L'expression est attribuée à Augustus de Morgan en 1846. On utilise parfois d'autres expressions comme "domaine du discours", "ensemble universel", "univers" ou "domaine de quantification" (pour une raison qui deviendra claire plus tard).

> discours est, au sens le plus strict du terme, le sujet ultime du discours.

- Lorsque l'on appplique un prédicat à un nom propre, on obtient un énoncé.
  - Donc le co-domaine d'un prédicat, c'est un ensemble d'énoncés.
- **Csq**: En général, un prédicat est une fonction depuis un ensemble d'individus vers un ensemble d'énoncé.
  - On note, pour tout prédicat P:

$$P : \text{Individus} \longmapsto \text{Énoncés}$$

Application:

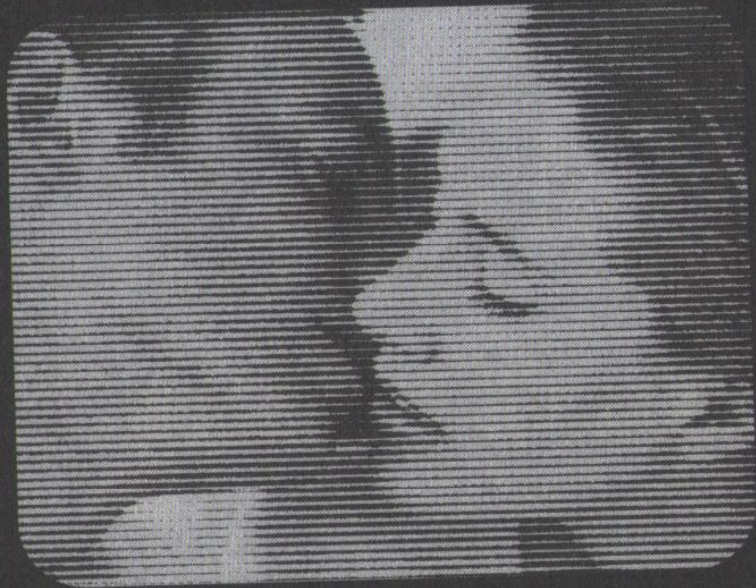
- Si on reprend nos trois prédicats césariens (V_1, V_2 et V_3) et nos deux individus (c et r).
  - L'univers de discours, c'est l'ensemble des deux individus: $\{c, r\}$.[14]
  - L'ensemble des énoncés qu'on peut construire contient six éléments: $\{V_1c, V_1r, V_2c, V_2r, V_3c, V_3r\}$.
  - Naturellement, si on ajoute les connecteurs de la logique propositionnelle, on pourra faire tout un tas d'énoncés complexes.
- Suit un autre exemple, plus amusant, tiré de (Dan Cryan 2004).

[14]Pour décrire un *ensemble*, on place les éléments de cet ensemble entre accolades, et on sépare les éléments par une virgule. L'ordre n'importe pas, car un ensemble est une collection désordonnée d'éléments.

Constructing a Soap Opera

We can construct formal languages to model almost anything. Here is one used to construct the plot of a typical soap opera:

Predicates	Characters	Connectives
Dies	Billy-Anne	and
Has an affair	Esmarelda	or
Is bankrupt	Zulika	because
	Juan	
Loves	John-Bob	
Hates	Eric	
Has an affair with	Dwayne	



Notice the difference between predicates that take *one* character like "**has an affair**" and those that take *two* like "**has an affair with**". They require separate rules of combination. The connectives do not have to be "logical" in the same way as the connectives of Predicate Calculus, but their behaviour in the language will be exhaustively defined. All possible well-formed formulae may be generated from the following rules ...

1. For one-place predicates:
   sentence = name, predicate

2. For two-place predicates:
   sentence = name, predicate, name

3. For the connectives:
   sentence = simple sentence, connective, simple sentence

From this we can arrive at a potentially infinite number of sentences: "**Juan is bankrupt**", "**Billy-Anne loves Eric**", "**John-Bob dies because Esmarelda has an affair with Zulika**" ...

2.2.4 Perspectives

- Une fois qu'on a des énoncés, on peut se demander s'ils sont vrais ou faux.
  - Ça correspond à l'*évaluation* en logique propositionnelle, à la *fonction* de vérité v.
  - Si v est une fonction, alors elle a un domaine et un co-domaine: quels sont-il?
    - ⋆ Le domaine de v, c'est ce à quoi elle s'applique, i.e. l'ensemble des énoncés descriptifs.[15]
    - ⋆ Le co-domaine, c'est l'ensemble des résultats possibles de v, i.e. les valeurs de vérité: $\{0,1\}$.[16]
- Donc, a priori, on peut appliquer sans problème notre fonction de vérité v à un énoncé de la logique des prédicats et se demander , par exemple si $v(V_1c) = 1$ ou 0, etc.
  - C'est précisément ce qu'on va faire plus tard dans la partie "sémantique" de la logique des prédicats.
  - Pour le moment, on peut se contenter d'une intuition: on va dire que $v(Pa) = 1$ lorsque l'individu nommé a a bien la propriété exprimée par P.
    - ⋆ **ex**: $v(V_1c) = 1$ puisque César (le type) a bien la propriété d'avoir vu les Gaules.
    - ⋆ **ex**: $v((3)) = 1$ ssi $\min(v(V_1c), v(V_2c), v(V_3c)) = 1$
      - · i.e. ssi $v(V_1c) = v(V_2c) = v(V_3c) = 1$.

      C'est bien le cas, puisque César (le type) a bien les trois propriétés d'avoir vu, d'être venu et d'avoir vaincu les Gaules.
  - **ex**: $v(V_1r) = 0$ puisque Louis Rouillé (le type qui vous écrit) n'a pas la propriété d'avoir vu les Gaules.[17]

[15] Par opposition aux ordres, questions, énoncés évaluatifs, et autres énoncés qu'on n'évalue pas volontiers.

[16] En logique ternaire vous aurez trois éléments dans le co-domaine, naturellement.

[17] Je le jure!

2.2.5 Exercice

Déterminez le domaine et le co-domaine des fonctions suivantes. Justifiez votre réponse en suivant votre bon sens:

- La fonction dont le graphe est la figure 1 de (Harrison, Kaiser, and VandenBrooks 2010) reproduite ci-dessous.

1938 J. F. Harrison *et al.* *Review. Oxygen and insect size*

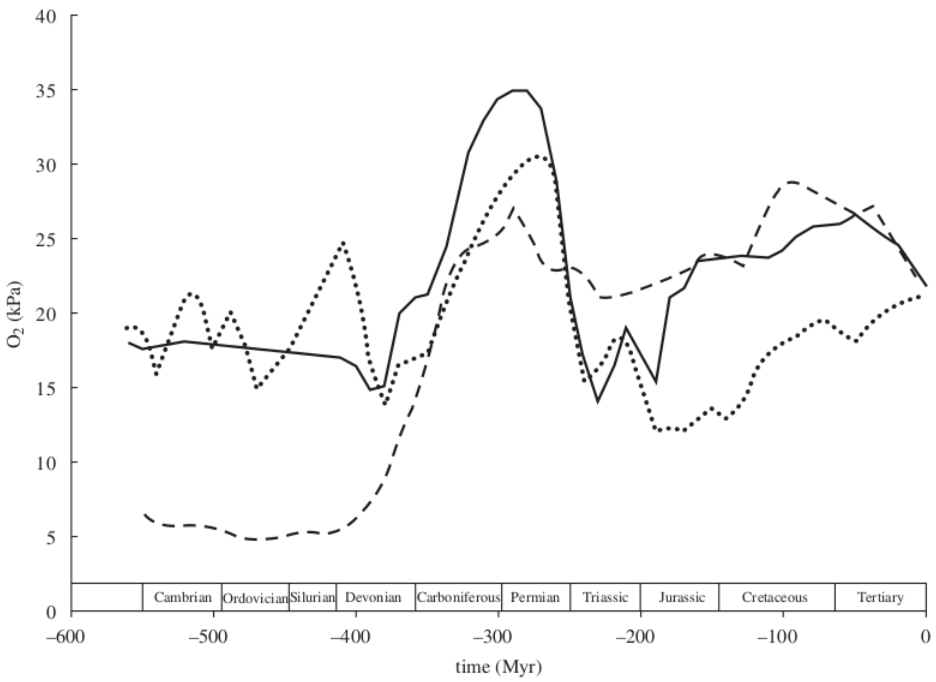


Figure 1. Various patterns of modelled aPO_2 over the Phanerozoic. Solid line (Berner & Canfield 1989), dotted line (Berner 2006*b*), dashed line (Bergman *et al.* 2004).

- La fonction décrite par ce graphique des anomalies des températures globales moyennes de surface par rapport à la moyenne 1951-1980.
- Le prédicat "être romain".
- Le prédicat V_1.

2.3 Prédicats n-aires

2.3.1 Motivations

- Supposons que l'on veuille traduire en logique des prédicats:

  (6) Théétète répond à l'Étranger.

- D'après ce qu'on a vu jusqu'ici, on peut procéder de deux manières:

  1. *Conventions*$_1$: t: "Théétète" et R_1x: "x répond à l'Étranger".
     - On obtient: R_1t
  2. *Conventions*$_2$: e: "l'Étranger" et R_2x: "Théétète répond à x".
     - On obtient: R_2e

- On voit bien qu'il y a quelque chose de décevant dans ces deux traductions.
  - À chaque fois, on perd l'information suivante: (6) parle de *deux* individus.
    * Autrement dit, l'univers de discours de (6) contient au minimum deux individus.
  - On applique le prédicat "répondre à" à la fois à Théétète et à l'Étranger.
    * Il nous faut manifestement un prédicat à deux trous...

2.3.2 Prédicat binaire

- La définition générale de fonction (comme objet insaturé) s'étend naturellement à deux arguments.
  - **ex**: $f(x,y) = 2x + 3y$
  - Pour $x = 1$ et $y = 2$, on a: $f(1,2) = 2.1 + 3.2 = 2 + 6 = 8$
- Puisque c'est une fonction, on peut se demander quel est son domaine et son co-domaine.
  - Ici, f prend deux nombres et en renvoie un.

  - Son domaine est donc une *paire* de nombre et son co-domaine un nombre.[18] En supposant que x et y sont des places vides pour des réels, on a:

$$f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{19} \longmapsto \mathbb{R}$$

- De la même façon, on peut définir des prédicats à deux trous.
  - **ex**: prenons $R(x,y)$ qui exprime "x répond à y".
    - R ainsi défini prend une paire d'individu et renvoie un énoncé:

$$R: \text{ Individus } \times \text{ Individus} \longmapsto \text{ Énoncés}$$

  - On traduit ainsi (6): $R(t,e)$.
- **Attention**: l'ordre de la paire est très important!
  - En effet: $R(t,e)$ n'exprime pas du tout la même chose que $R(e,t)$.
  - De la même façon que (6) n'est pas le même énoncé que: "L'Étranger répond à Théétète". Ils ne décrivent pas du tout la même situation.[20]

Point de vocabulaire et de notation:

- On dit qu'un prédicat a un seul trou est un prédicat *unaire* et un prédicat à deux trous est un prédicat *binaire*.[21]
  - L'*arité* d'un prédicat, c'est le nombre de trous qu'il a.
    - Un prédicat binaire est donc d'arité 2.
- Souvent, au lieu de dire "prédicat binaire", on dit *relation*. Autrement dit, dans le contexte de la logique des prédicats, une *relation*, c'est un prédicat binaire.[22]

[18] L'opération qui consiste à prendre deux éléments pris dans deux ensembles et à former une paire s'appelle un *produit cartésien* et on note ça $\times$. Étant donnés deux ensembles E et F, $E \times F$ désigne l'ensemble des paires contenant un élément de E et un élément de F.

[19] On écrit parfois $\mathbb{R}^2$ au lieu de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

[20] Rappelez-vous que, dans les dialogues platoniciens, les rôles sont définis au début du dialogue: on choisit le questionneur et le répondant. Dans le *Sophiste*, on laisse l'honneur de questionner à l'Étranger qui est un philosophe en visite à Athènes. Théétète, alors un jeune étudiant en philosophie et en mathématiques, prend la place du répondant. Le dialogue est en fait une sorte de *masterclass*, pour utiliser un terme anachronique.

[21] On trouve parfois les expressions "prédicat unadique" et "dyadique".

[22] Pour cette raison, on trouve parfois l'expression "logique des relations" à la place de "logique des prédicats".

  - Ce terme est tout à fait justifié d'un point de vue philosophique, car si les prédicats unaires expriment des propriétés d'individus, les prédicats binaires expriment des relations entre individus.
    - ⋆ Autrement dit, (6) exprime le fait que Théétète et l'Étranger sont dans une relation particulière, à savoir celle de questionneur-répondant.
  - En conséquence, l'usage est d'utiliser la lettre R pour symboliser un prédicat binaire.

- **Notation**: au lieu d'écrire $R(a, b)$ on écrit souvent Rab pour aller plus vite.
  - On utilise aussi très souvent la notation aRb.
  - Cette notation vient de l'arithmétique où l'usage est d'écrire, par exemple, "$a + b$" plutôt que "$+ab$".[23]

2.3.3 Prédicats n-aires

Rq: Pourquoi s'arrêter en si bon chemin?

- Une fois qu'on a défini les prédicats binaires, on peut définir de la même façon les prédicats ternaires, quaternaires, ..., n-aires.[24]
- **Rq**: il y a beaucoup de prédicats ternaires dans le langage naturel. Par exemple:

  (7) Socrate a présenté Théétète à l'Étranger

  - Soit $P(x, y, z)$ (ou $Pxyz$): "x a présenté y à z" et s: "Socrate".
  - On traduit ainsi naturellement (7): $P(s, t, e)$
- En toute rigueur, on devrait spécifier l'arité d'un prédicat en la mettant en exposant, ainsi on devrait écrire: $P^3(s, t, e)$. En pratique, on omet l'exposant, car il est très facile d'identifier l'arité d'un prédicat en contexte.

[23] De la même manière, en logique propositionnelle, on écrit plus volontiers $p \wedge q$ que $\wedge pq$. Cependant, il faut savoir que la notation polonaise consiste justement à écrire $\wedge pq$ (bien qu'ils n'utilisent pas le symbole $\wedge$, mais la lettre K). La notation polonaise s'étend naturellement à l'arithmétique. Elle a ce grand avantage de ne pas avoir besoin de parenthèses.

J'en profite pour vous indiquer qu'il y a eu, jusqu'à la seconde guerre mondiale, une école polonaise de logique très développée et très influente qu'on a appelé l'école de Lwów-Varsovie, pour une raison assez transparente.

[24] On parle parfois de *relation* n-aire au lieu de prédicat n-aire.

2.3.4 Retour sur la distinction entre logique et grammaire

Observation: Avec les prédicats binaires et n-aires, on commence à apprécier la différence entre structure logique et structure grammaticale d'une phrase.

- **ex**: Dans (6), Théétète et l'Étranger sont sur le même plan logique.
  - Ce sont deux individus de l'univers de discours, et deux arguments du prédicat binaire R.
- Pourtant ils ne sont pas sur le même plan grammatical.
  - Théétète est le *sujet* grammatical, alors que l'Étranger est l'*objet* grammatical.
- **À retenir**: En logique, il n'y a pas de distinction entre sujet et objet, car il n'y a que des objets.[25]

Remarque importante: La logique des prédicats "rentre dans la structure de l'énoncé", mais on s'intéresse *uniquement* à la structure logique des énoncés.

- **ex**: Considérons l'énoncé suivant:

  (8) Théétète est le répondant de l'Étranger.

  - (8) a la même structure logique que (6).
  - Naturellement, ils n'ont pas du tout la même structure grammaticale.
  - Ils ont la même structure *logique*, car ils expriment la même relation qui relie les mêmes individus.
    - Simplement, on exprime cette relation avec des mots différents.
  - Ce qui compte d'un point de vue logique, ce sont les propriétés des individus dont on parle et les relations qui relient ces individus, pas la manière de le dire.
- **Csq**: Les catégories grammaticales comme celle de verbe ("répondre à") et substantif ("le répondant de") ne sont pas pertinentes en la logique des prédicats où l'on cherche à exhiber la structure logique des énoncés.
  - Même chose pour les autres catégories grammaticales comme celle d'adjectif.

[25] Ce genre de considération a des répercutions philosophiques phénoménales. Cf. par exemple, le cours d'Alain de Libera "Inventio subjecti", dans lequel il étudie l'histoire logico-philosophique extraordinaire de la distinction sujet/objet.

- * Par exemple, ces deux énoncés ont la même structure logique:

    (9) Socrate est un homme.

    (10) Socrate est humain.

  * (ils sont donc traduits de la même façon en logique des prédicats, à savoir Hs – avec des conventions de traduction transparentes)

- – Même chose pour des distinctions touchant à l'inflexion des verbes.

  * Par exemple, ces deux énoncés ont la même structure logique:

    (11) Théétète écoute l'Étranger.

    (12) l'Étranger est écouté par Théétète.

- Tous ces exemples montrent que, en un sens, la structure grammaticale d'une phrase *cache* sa structure logique.[26]

  – Attention donc aux intuitions grammaticales dans les exercices de traduction.

  – Il faut toujours se demander: dans la situation décrite, quels sont les individus? leurs propriétés? les relations qu'ils entretiennent?

  * En pratique, varier les descriptions d'une même situation peut s'avérer utile.
  * On peut aussi changer de langue: la structure logique est précisément ce qu'une bonne traduction est censée conserver.

- Voici un passage à méditer de (Quine 1972) (§25, p. 149) qui formule très clairement ce dernier point:

> Un terme relatif [i.e. un prédicat binaire], comme un terme absolu [i.e. un prédicat unaire], peut se présenter indifféremment sous la forme d'un substantif, d'un adjectif, ou d'un verbe. Dans "x est le secourt de y" nous employons le substantif, dans "x est secourable pour y" l'adjectif, et dans "x secourt y" le verbe; mais logiquement, rien n'oblige à distinguer ces trois formes. En fait, du point de vue logique, l'important pour les termes relatifs est qu'ils sont vrais d'objets pris par couples. Alors que "homme", "marche", etc., sont vrais de César, Socrate, etc., pris isolément, le terme relatif "secourt" est vrai quant à lui de Jésus et de Lazare pris comme couple (ou encore, vrai de

[26] Pour cette raison, on parle parfois de la "grammaire de surface" par opposition à la "structure profonde" d'un énoncé.

Jésus respectivement à Lazare), vrai de Louis XIV et de Molière pris comme couple (ou encore, vrai de Louis XIV respectivement à Molière), etc. [...]

L'ordre de "x" et de "y" est par un côté accidentel: "x secourt y" peut aussi bien s'exprimer "y est secouru par x". Mais d'un autre côté, l'ordre est essentiel: "x secourt y" par exemple "Jésus secourt Lazare", n'est pas équivalent à "y secourt x". La phrase "x secourt y" peut donc se transcrire aussi bien sous la forme "Fxy" et sous la forme "Fyx", mais les interprétations que l'on impose successivement à "F" sont alors différentes l'une de l'autre – aussi différentes que "secourt" l'est de "est secouru par". En général "Fxy" ne peut être égalé à "Fyx".

2.3.5 Exercice

Traduire les phrases suivantes en logique des prédicats n-aire:

- Théétète écoute l'Étranger.
- Socrate n'écoute pas l'Étranger.
- Théétète, Socrate et l'Étranger sont des philosophes, mais Théétète et l'Étranger discutent ensemble alors que Socrate ne discute ni avec Théétète, ni avec l'Étranger.
- Socrate est assis entre Théétète et l'Étranger.
- Si Socrate est assis entre Théétète et l'Étranger, alors il est philosophe.
- Théétète n'écoute pas Socrate quand l'Étranger lui parle.
- Soit Théétète ne vole pas dans les airs, soit il écoute l'Étranger, soit il est distrait par Socrate.
- Socrate regarde Théétète répondre à l'Étranger mais il n'écoute pas l'Étranger ni Théétète.

Trouver un prédicat quaternaire et un prédicat 5-aire en langage naturel.

3 Théorie de la quantification

3.1 Constantes et variables

3.1.1 Constantes

Def: On appelle *constante d'individu* (ou simplement constante) un symbole qui fait référence à un individu particulier unique.

- Une constante, c'est un individu dans le langage.
  - **ex**: c est une constante qui fait référence à César (le type qui a vécu il y a bien longtemps).
    - ⋆ L'usage veut que l'on utilise les lettres romaines du début de l'alphapet, a, b, c, etc.
  - En toute rigueur, il faut distinguer le *nom* de l'individu et l'*individu* lui-même.
    - ⋆ En effet, ils n'ont pas les mêmes propriétés.
      - · **ex**: L'énoncé "'César' est composé de cinq lettres" est vrai mais "César est composé de cinq lettres" est faux.
    - ⋆ On distingue ainsi souvent $\overline{c}$ (le type) et c (le nom) en logique des prédicats.[27]
  - En pratique, pourtant, on ne va pas faire la différence.
    - ⋆ En fait, on va reléguer cette différence à l'arrière plan et utiliser le même symbole pour désigner le type et le nom.
    - ⋆ C'est ce qu'on appelle des constantes d'individus *autonyme*.
- Grammaticalement, les *noms propres* sont des exemples paradigmatiques de constantes.

3.1.2 Variables

Rq: On peut certes saturer un prédicat avec un (ou des) nom(s) propre(s), mais ce n'est pas la seule manière de faire.

- En effet, si on réfléchit auxtégories grammaticales, on peut penser aux *pronoms*.
  - J'entends par là les pronoms personnels ("je", "tu", "il", ...) et démonstratifs ("ceci", "cela", ...) en particulier.

[27] Cette distinction coïncide *grosso modo* avec l'usage des guillemets en langage naturel.

- **ex**: La formule de César qui est passée à la postérité est à la première personne: *Veni, vidi, vici.*[28]
  - Ainsi, au lieu de (3), je peux résumer *la Guerre des gaules* en disant:

    (13) Il a vu, il est venu, il a vaincu.

- Pour traduire (13), on utilise une *variable* que l'on note x. On obtient ainsi:

  (14) $V_1(x) \wedge V_2(x) \wedge V_3(x)$

- **Rq**: On traduit de la même façon la phrase prononcée par César et (13). C'est donc à une notion de *pronom* relativement abstraite que la notion de *variable* renvoie.[29]
  - On peut avoir plusieurs variables x, y, z qui sont comme autant de pronoms logiques.

3.1.3 Distinction

Question: Quelle est la différence entre une *constante* et une *variable*? (Naturellement, je ne parle pas de la différence *grammaticale* entre un nom propre et un pronom, mais de la différence *logique* entre constante et variable.)

- Les variables (comme les pronoms) n'ont de sens *qu'en contexte*.
  - C'est même pour ça qu'on les appelle des *variables*.
  - Ils sont définis comme des "symboles dont la signification change avec le contexte" dans (Curry 1952) (p. 31).
- **Csq**: Pour *interpréter* une variable, il faut regarder le *contexte* (Qui parle? À qui? De quoi?)
  - Autrement dit, si je ne connais pas le contexte, je ne peux pas interpréter.
  - **ex**: Si je vous dis (13) sans contexte, sans avoir mentionné César avant, vous ne pouvez pas savoir de quoi je parle.
    - Vous ne pouvez donc pas savoir si je dis vrai ou faux.
    - Vous ne pouvez même pas savoir si les trois "il" font référence à la même personne...

[28] Un bel exemple de *latinas brevitas*, comme on dit.

[29] En effet, on ne fait pas de différence entre les types de pronoms (personnels / impersonnels; 1ère / 2e / 3e personne).

        · Imaginez un contexte où je dis (13) en pointant du doigt trois personnes différentes à mesure que je progresse dans mon énonciation.[30]

  – (13), sans contexte, est donc ambigu: il peut avoir plein de significations.
    * **À retenir**: Donner un contexte permet de désambiguiser un énoncé qui contient des variables.
    * En un sens, ça revient à transformer une variable en constante.

- Par opposition, une phrase comme (3) ne dépend pas (autant) du contexte.
  – La signification des constantes (comme les noms propres) est fixe (i.e. ne dépend pas du contexte).
    * C'est même pour ça qu'on les appelle des *constantes*.

Rq: Attention, il y a toujours un peu de contexte dans la signification d'un énoncé. C'est ce qu'on appelle généralement, après Frege, le principe du contexte. Voir l'illustration tirée de (Dan Cryan 2004) plus bas.

- Il est pourtant très utile de distinguer plusieurs types de contextes. Car le contexte qui permet de donner de la signification aux pronoms (et autres variables) est très particulier.

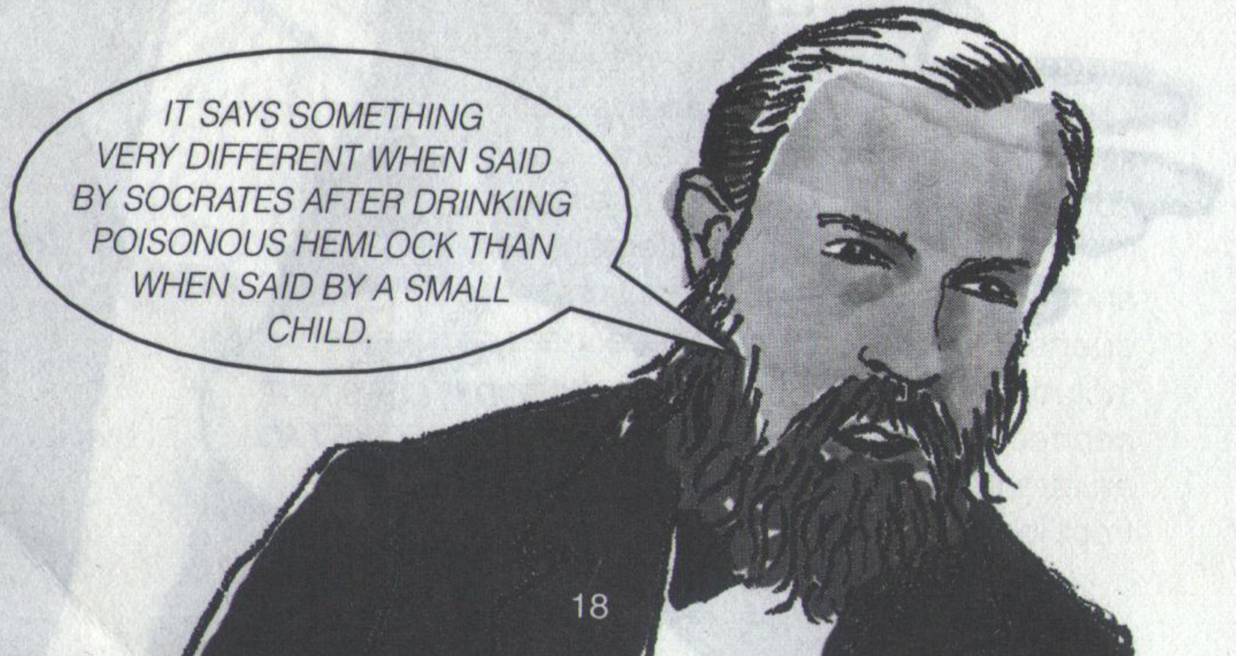
- L'étude de l'apport sémantique du contexte en général a pris un tournant particulier depuis les travaux du philosophe John Austin, notamment ceux présentés lors de ses Williams James Lectures en 1955, publié ensuite dans (Austin 1962) (traduit en français par *Quand dire, c'est faire*).
  – C'est un champ de recherche très vaste.
  – Si vous êtes intéressé, vous pourrez lire (Récanati 2003) pour avoir un apperçu.

[30]Ça n'est pas du tout un contexte artificiel, au cas où vous froncez les sourcils. Pensez par exemple à la célèbre chanson des *Blues Brothers* "Everybody needs somebody" qui se termine par cet énoncé, chanté *ad libitum*: "I need you, you, you". En concert, les chanteurs pointent des personnes différentes pour chaque "you". Naturellement, la chanson aurait une toute autre signification si les trois "you" faisait référence à la même personne...

The Context Principle

Frege suggested "the context principle" which says that the smallest unit that logic can deal with is a subject-predicate statement, or *proposition*. It is only in the context of a proposition *as a whole* that we know the meanings of the words which compose it.

Take the sentence "**I feel cold**". This sentence could be uttered by various people at various times. The same words "I feel cold" can be used to express very different propositions, depending upon the circumstances in which they are *used*.



3.1.4 Exercice

"Some like it hot" est le titre d'une comédie américaine célèbre de Billy Wilder. Ce titre a été traduit en français par "Certains l'aiment chaud".
Le titre est en fait une des répliques du film. En tant que titre, il est donc sorti de son contexte. Pour cette raison, ce titre est essentiellement ambigu. On se demande naturellmement à quoi fait référence ce "it" (ce "l'"). Cette ambiguité fait toute l'originalité du titre.

- Dans le contexte où apparaît l'énoncé dans le film, il y a deux manières de désambiguiser "it", quelles sont-elles?
- On est donc dans une situation de "quiproquo".[a] Expliquez pourquoi le quiproquo fonctionne bien en anglais et très mal en français.[b]

ps: Vous pourrez trouver le film ici.

[a] Ce mot signifie littéralement "l'un pour l'autre" en latin.
[b] Remarquez qu'il est impossible de construire un tel quiproquo avec une constante. Voilà la véritable différence entre variable et constante.

3.2 Variables libres et variables liées

3.2.1 Distinction

- On appelle *variable libre* des variables qui attendent un contexte pour être évaluées.
  - Une phrase comme (14) sans contexte, en fait, n'exprime pas un énoncé.
  - C'est une fonction propositionnelle complexe.
    - Attention, c'est une fonction à trois arguments.
    - On pourrait la réécrire: $V_1(x) \wedge V_2(y) \wedge V_3(z)$.
      - Cela correspond à un prédicat complexe $P(x, y, z)$ qui traduit l'énoncé: "x a vu et y est venu et z a vaincu".
      - (3), c'est donc la même chose que: $P(c, c, c)$.
  - Ainsi, se demander si (14) est vrai ou faux, sans contexte, c'est aussi absurde que se demander si:

    - "est romain" est vrai ou faux.
    - $f(x) = 2x + 1$ est plus grand que 0.
  - *Encore une fois*: tout dépend du contexte (de qui on parle, de quel nombre on parle).

- Cependant, si le contexte peut nous aider à transformer une variable en constante, ce n'est pas la seule manière d'obtenir un énoncé évaluable comme vrai ou faux. On peut aussi *lier* la variable.

  - **ex**: On peut dire que l'énoncé (14) est *toujours vrai* (ou *toujours faux*), quel que soit le contexte.
    - Autrement dit, il s'agit de dire: "vous pouvez mettre la constante que vous voulez à la place des x et vous obtiendrez un énoncé vrai (ou faux)."
  - **ex**: À l'inverse, on peut dire que l'énoncé (14) *n'est pas toujours vrai* (ou *n'est pas toujours faux*), quelque soit le contexte.
    - Autrement dit, il s'agit de dire: "il y a au moins une constante telle que, si vous la mettez à la place des x alors vous obtiendrez un énoncé faux (ou vrai)."
  - En particulier, puisqu'on sait que (3) est vrai, on peut en conclure qu'il y a bien un contexte dans lequel (14) est vrai.
    - C'est le contexte dans lequel les trois x sont remplacés par c.
  - C'est une manière compliquée de dire:

    (15) Il y a **quelqu'un** tel qu'**il** a vu, qu'**il** est venu et qu'**il** a vaincu.

    Pour dire la même chose avec une phrase plus idiomatique:

    (16) Quelqu'un a vu, est venu et a vaincu.

    - On voit que les pronoms sont toujours là (ils sont cachés dans (16); je les ai graissés dans (15)), mais il n'attendent plus un contexte.
    - Ils renvoient anaphoriquement à "quelqu'un".
    - On dit qu'ils sont *liés* à "quelqu'un".
  - La deuxième manière de lier la variable, c'est de dire que (14) est toujours vrai.
    - Ça revient à dire:

      (17) **Tout le monde** est tel qu'**il** a vu, qu'**il** est venu et qu'**il** a vaincu.

Pour dire la même chose avec une phrase plus idiomatique:

(18) Tout le monde a vu, est venu et a vaincu.

* Même remarque que précédemment.
* Naturellement, cet énoncé est faux puisqu'on peut trouver une constante telle que (14) donne un énoncé faux si on remplace les trois x par cette constante.
  - **ex**: la constante r donne $V_1(r) \wedge V_2(r) \wedge V_3(r)$
  - Ce qui signifie "Louis Rouillé a vu, est venu et a vaincu".
  - Ce qui est évidemment faux.

- On appelle *quantificateurs* ce qui est capable de lier une variable.
  - En logique des prédicats, il y a deux quantificateurs que l'on note $\exists x$ et $\forall x$.[31]
    * Ils s'accompagnent de la variable qu'ils lient.
    * $\exists x$ s'appelle le quantificateur *existentiel* et on lit: "il existe un x tel que".[32]
      - $\exists x Px$ signifie: "on peut trouver une constante a telle que Pa est vrai".
    * $\forall x$ s'appelle le quantificateur *universel* et on lit: "pour tout x, ...".
      - $\forall x Px$ signifie: "Pa est vrai quelque soit la constante a qu'on choisit".
    * $\exists x$ et $\forall x$ sont des symboles logiques sur le même plan que les connecteurs logiques de la logique propositionnelle.
  - Dans le langage naturel, il y a tout plein de quantificateurs plus ou moins complexes.
    * **ex**: "Tout le monde", "quelqu'un", "personne", "certains", "la plupart", "une personne sur deux", "au moins une personne", "au moins deux personnes", "tout le monde sauf une personne", etc.
    * **Test**: Un quantificateur, c'est ce qui peut lier un pronom et donc remplacer $\mathfrak{Q}$ dans l'enoncé: "$\mathfrak{Q}$ est tel que ... il.s/elle.s ..."
  - Sur ce point (comme ailleurs) le langage naturel est plus expressif que la logique des prédicats. La théorie de la quantification consiste à trier les quantificateurs du langage naturel selon leur degré de complexité logique.

[31] Ce sont comme des E et A à l'envers. On trouve parfois les notations alternatives $\bigvee$ et $\bigwedge$.
[32] Ou bien "Il y a un x tel que" ou bien "pour un x, ..." ou bien "pour quelque x, ...".

  * $\exists x$ et $\forall x$ sont les quantificateurs *les plus simples*, d'un point de vue logique.

- **Application**:
  - On traduit donc (15) et (16):

    (19) $\exists x(V_1 x \wedge V_2 x \wedge V_3 x)$

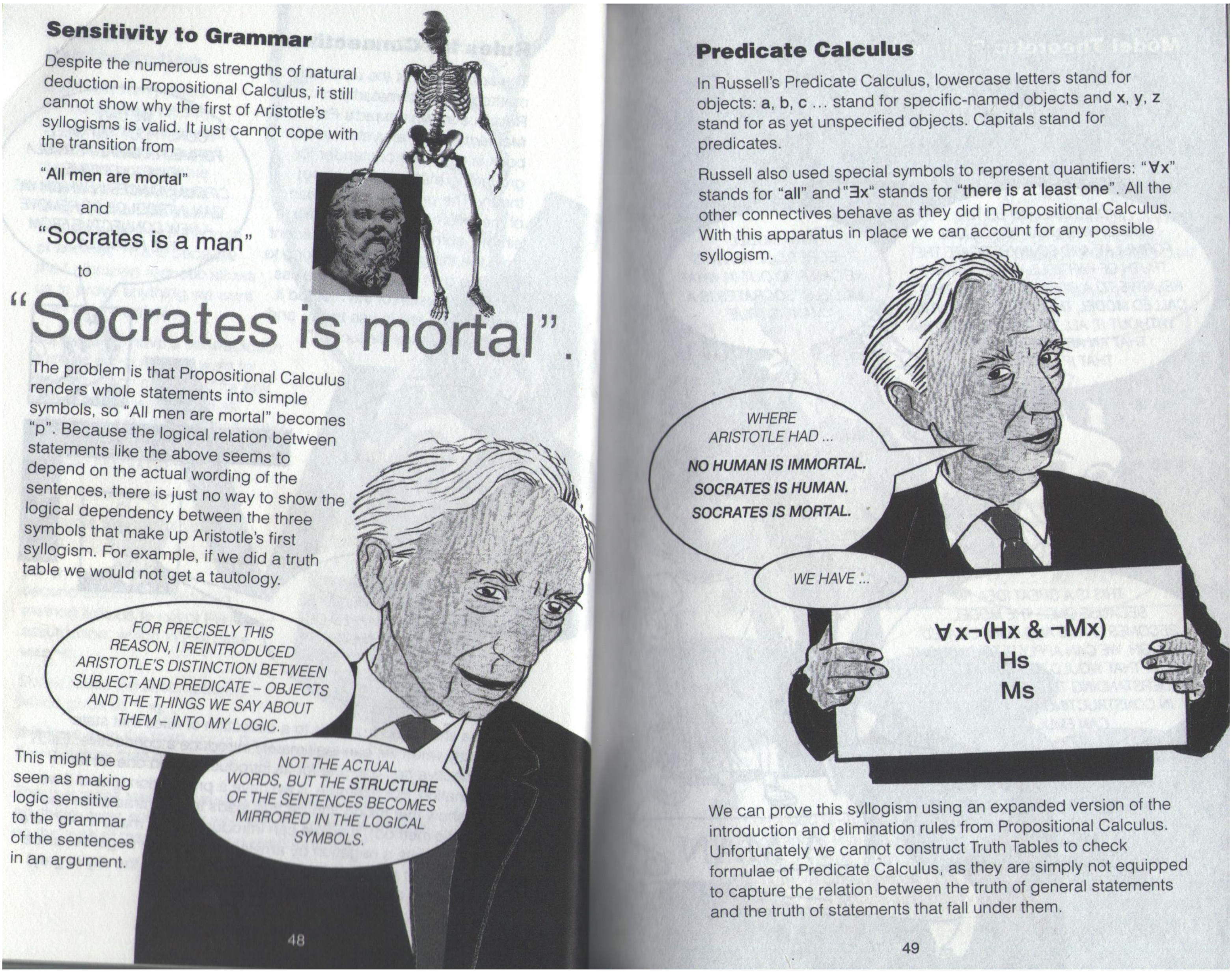
  - On traduit donc (17) et (18):

    (20) $\forall x(V_1 x \wedge V_2 x \wedge V_3 x)$

- On peut naturellement saturer de la même manière des prédicats binaires, en utilisant deux quantificateurs.
  - **ex**: $\exists xRxe$.
    * Puisque (6) est vrai, il faut bien que "Quelqu'un répond à l'Étranger" soit vrai.
  - **ex**: $\exists x\exists yRxy$
    * Cela signifie que "Quelqu'un répond à quelqu'un".[33] C'est manifestement vrai si (6) est vrai.
  - **ex**: $\exists xRxx$.
    * Cela signifie que "Quelqu'un est tel qu'il se répond à lui-même". Ce n'est manifestement pas une conséquence de (6).
  - **ex**: $\forall x\exists yRxy$
    * Cela signifie: "Pour tout x il existe un y tel que x répond à y".
  - **ex**: $\exists x\forall yRxy$
    * Cela signifie: "Il existe un x tel que pour tout y, x répond à y"
  - **Rq**: La phrase française "Tout le monde répond à quelqu'un" est structurellement ambigue et peut vouloir dire l'un ou l'autre des deux derniers énoncés.
    * Dans le cas où tout le monde répond à la même personne, on traduira: $\forall x\exists yRxy$
    * Dans le cas où chacun répond à une personne séparément, on traduira: $\exists x\forall yRxy$

[33] Ce n'est pas nécessaire que les deux "quelqu'un" soient les mêmes, mais rien ne l'empêche.

Pause graphique: Si l'invention des quantificateurs revient à Frege, c'est Russell qui a donné sa forme actuelle à la théorie de la quantification. C'est lui aussi qui a introduit les symboles que l'on utilise. Voici, *enfin*, le plus célèbre des syllogismes traduit en logique des prédicats (tiré de (Dan Cryan 2004)).



3.2.2 Exercice

Traduisez les phrases suivantes:

- Quelqu'un écoute Théétète.
- Pas tout le monde écoute Théétète.
- Socrate n'écoute personne.
- Si l'Étranger parle à quelqu'un, il y a une personne qui n'écoute pas.
- Quelqu'un écoute tout le monde.
- Socrate est assis entre quelqu'un et quelqu'un d'autre.
- Personne n'a présenté personne à quelqu'un.

Montrez que la phrase suivante est ambigue. Donner deux contextes très différents qui peuvent rendre vraie cette phrase, puis proposez deux traductions en logique des prédicats pour rendre compte de cette ambiguité. Réécrivez ces phrases de deux manières non-ambigues en langage naturel:

- Tout le monde a besoin de quelqu'un.[a]

[a] Dans la chanson "Everybody needs somebody", quelle est l'interprétation visée?

3.2.3 Portée des quantificateurs

Def: On dit que les variables liées par un quantificateur sont dans la *portée* du quantificateur.

- **ex**: La portée de $\exists x$ dans (19) est ici soulignée: $\underline{\exists x}(V_1\underline{x} \wedge V_2\underline{x} \wedge V_3\underline{x})$
- **Csq**: Les variables qui ne sont dans la portée d'aucun quantificateur sont des variables libres.
- Les parenthèses sont donc très importantes ici.
  - Considérez par exemple la formule suivante: $(\underline{\exists x}V_1\underline{x}) \wedge V_2x \wedge V_3x$
    - ⋆ La portée de $\exists x$ n'est pas la même que dans (19).
    - ⋆ Cette formule signifie: "Quelqu'un a vu et il est venu et il a vaincu".
    - ⋆ Mais il se peut très bien que le quelqu'un qui a vu ne soit pas celui qui est venu ou celui qui a vaincu.

- Pour montrer que les deux derniers x ne sont pas dans la portée de $\exists x$, on peut les renommer afin d'obtenir:

$$\exists x V_1 x \wedge V_2 y \wedge V_3 z$$

- Maintenant, on peut lier les deux variables libres avec d'autres quantificateurs
  - **ex:**[34] $\underline{\exists x} V_1 \underline{x} \wedge \underline{\underline{\exists y}} V_2 \underline{\underline{y}} \wedge \underline{\underline{\underline{\exists z}}} V_3 \underline{\underline{\underline{z}}}$
  - Naturellement, tous les panachages sont possibles:

(21) $\exists x \forall y \exists z (V_1 x \wedge V_2 y \wedge V_3 z)$

(22) $\forall x \exists y (V_1 x \wedge V_2 x \wedge V_3 y)$

...

3.2.4 Exercice

Donnez une paraphrase en langage naturel de (21) et (22).

Considérez les formules suivantes. Dans chaque formule, indiquez les variables libres et liées (en les liant à leur quantificateur).

1. $Px \to \exists x Qx$
2. $\exists x (Px \wedge Qy)$
3. $\exists x \forall y (Px \to Qy)$
4. $\forall x Rxx$
5. $\exists x Rxy$
6. $\forall x \exists y (Ryx)$
7. $\forall x \exists y \forall z (Rxy \to Syz) \wedge \exists x (Px \vee Qy)$
8. $\exists x Rxy \wedge \forall y Rxy \wedge (\forall x \exists y Sxy \to Pz)$
9. $\forall x \exists x Px$

Traduisez "Certains l'aiment chaud!" en logique des prédicats, et indiquez les variables libres et liées.

3.2.5 Substitution et renommage

Def: La *substitution* d'une constante a à une variable libre x consiste à remplacer les occurences de x par des occurences de a dans une formule donnée. On note $F[x/a]$, la substitution de a à x dans la formule F.

[34] Ici, j'ai souligné les portées, bien que le renommage des variables rende la portée des quantificateurs tout à fait explicite.

- Une telle substitution consiste à donner un contexte où on interprète un pronom par un nom propre.
- **Csq**: On ne peut pas substituer une constante à une variable liée.
  - C'est pour cela qu'on appelle des variables libres des variables *libres*: elles sont libres *pour la substitution*.
- **ex**: $(14)[x/c] = (3)$
- **ex**: $(\exists x V_1 x \wedge V_2 y \wedge V_3 z)[y/c; z/r] = \exists x V_1 x \wedge V_2 c \wedge V_3 r$
- Lorsque la variable n'est pas libre, la substitution est nulle:
  - **ex**: $(\forall x Px)[x/c] = \forall x Px$

Def: Le *renommage* d'une variable x en y consiste à remplacer toutes les occurences de la variable x par une variable y.

- **Propriété importante**: Dans une formule, on peut renommer toutes les variables liées par des variables *qui n'apparaissent pas dans la formule de départ*.
  - **ex**: $\forall x Rxx$, c'est pareil que $\forall y Ryy$.
  - **ex**: $\forall x \exists y Rxy$, c'est pareil que $\forall y \exists z Ryz$
- Si on renomme avec des variables qui apparaissent dans la formule de départ, on s'expose à un phénomène dangereux qu'on appelle la *capture* d'une variable.[35]
  - **ex**: $\forall x Rxy$, ça n'est pas la même chose que $\forall x Rxx$.
    * En effet, la première formule signifie: "Pour tout x, x est relié à y par la relation R"...
    * ... et la seconde signifie: "Pour tout x, x est relié à lui-même par la relation R".
    * Par ailleurs, la première formule a un trou: c'est donc un prédiat unaire complexe...
    * ... et la seconde n'a pas de trou: c'est donc un énoncé qu'on peut évaluer comme vrai ou faux.
  - *Bref*, $\forall x Rxy$ et $\forall Rxx$, ça n'est pas *du tout* la même chose.

[35] C'est dangereux, car on change dramatiquement le sens de la formule.

3.2.6 Exercice

Écrire les substitutions suivantes:[a]

1. $(Px)[x/a]$
2. $(Rxy)[x/a]$
3. $(\forall xRxy)[y/a]$
4. $(\exists x(Ryx \to Sxy))[x/a;y/b]$
5. $(\forall xRxy \land \exists xRzx)[y/a;z/b]$
6. $(\forall x\exists y(Rxy \to Ryx) \land (Px \to Rxy))[x/a;y/b]$
7. $((\forall xPx \to Qx) \lor (Px \to \forall xQx))[x/a]$

[a] *Conseil*: commencez par renommer soigneusement les variables en rendant explicite la portée de chaque quantificateur ce qui permettra de distinguer explicitement les variables libres des variables liées.

3.3 Quantificateurs et constantes

Rq: Les quantificateurs ont un point commun avec les constantes, en ceci que lorsqu'on associe un prédicat unaire et une constante ou un quantificateur, on obtient un énoncé. Il semble donc que, du point de vue logique, les quantificateurs et les noms propres ont la même fonction: celle d'être des arguments possibles d'une fonction propositionnelle.

Question: Est-ce que les quantificateurs sont des noms propres?

- **Réponse**$_1$: Non!
- Pour s'en convaincre, voici deux petites histoires à propos de “personne” (le quantificateur) et des quiproquos qui résultent du fait de prendre un quantificateur pour un nom propre ou un nom propre pour un quantificateur.

3.3.1 Le Roi et Personne

Voici un passage de *Through the looking glass*, de Lewis Carroll, Alice et le Roi attendent avec impatience un messager qui doit arriver à cheval:

> "I see nobody on the road," said Alice.
>
> "I only wish I had such eyes," the King remarked in a fretful tone. "To be able to see Nobody! And at that distance, too! Why, it's as much as I can do to see real people, by this light!"

Malheureusement, la blague est intraduisible en bon français, car Alice doit dire "je *ne* vois personne", ce qui empêche de prendre "personne" pour un nom propre.[36] Un peu plus loin, le quiproquo continue, cette fois-ci entre le Roi et son messager qui est arrivé entre temps:

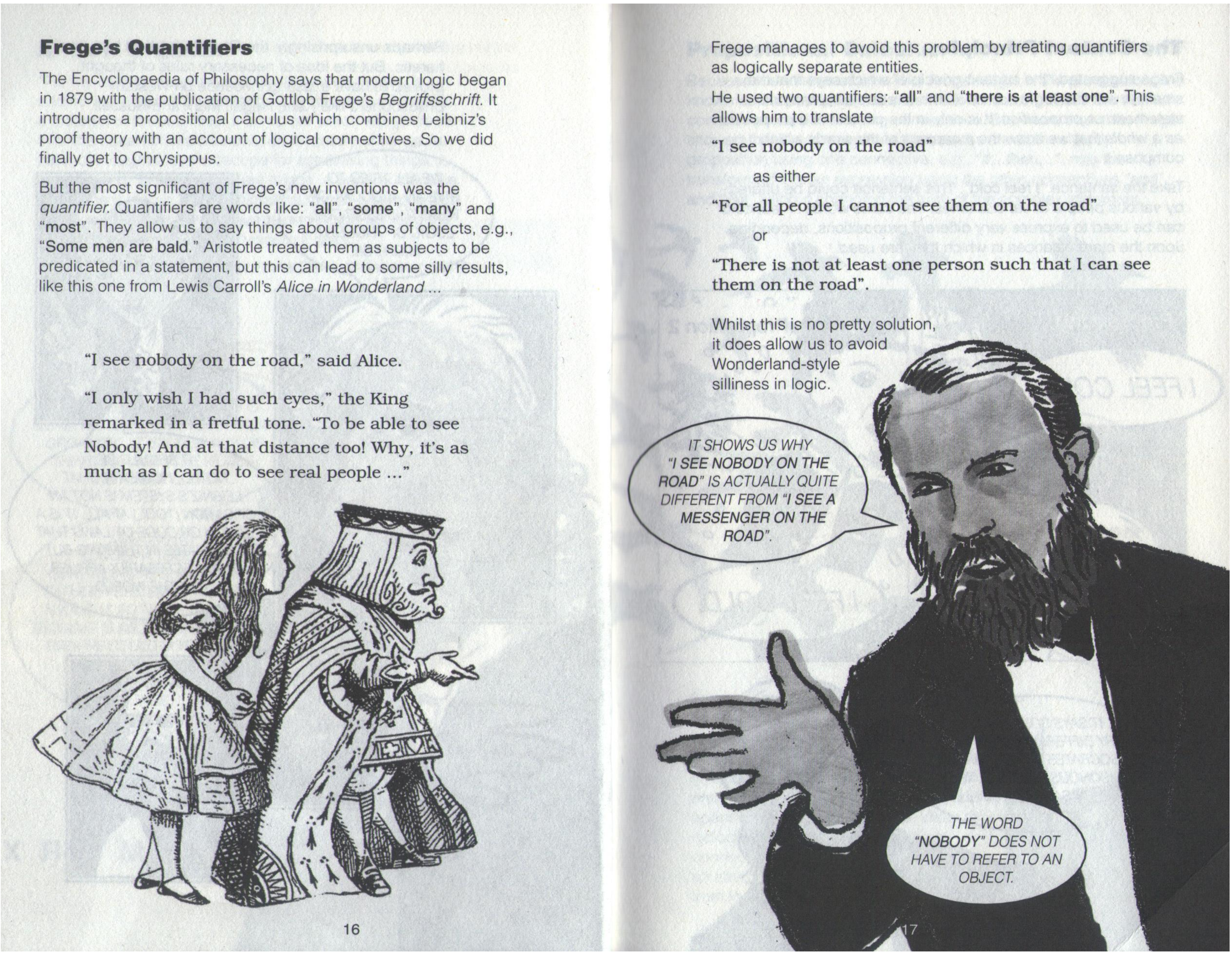
> "Who did you pass on the road?" the King went on, holding out his hand to the Messenger for some more hay.
>
> "Nobody," said the Messenger.
>
> "Quite right," said the King: "this young lady saw him too. So of course Nobody walks slower than you."
>
> "I do my best," the Messenger said in a sulky tone. "I'm sure nobody walks much faster than I do!"
>
> "He can't do that," said the King, "or else he'd have been here first. However, now you've got your breath, you may tell us what's happened in the town."[37]

On voit bien ici que le ressort de la blague, c'est que le Roi prend systématiquement "nobody" (le quantificateur) pour "Nobody" (le nom propre).

Pause graphique: Voici une illustration de cette célèbre historiette tirée de (Dan Cryan 2004).

[36] Le livre, cependant, a été traduit en français. Si quelqu'un trouve la traduction, je la veux bien. Par "quelqu'un", je veux bien dire quelqu'un et pas Quelqu'un...

[37] *Through the looking glass*, ch. 8.



Frege's Quantifiers

The Encyclopaedia of Philosophy says that modern logic began in 1879 with the publication of Gottlob Frege's *Begriffsschrift*. It introduces a propositional calculus which combines Leibniz's proof theory with an account of logical connectives. So we did finally get to Chrysippus.

But the most significant of Frege's new inventions was the *quantifier*. Quantifiers are words like: "**all**", "**some**", "**many**" and "**most**". They allow us to say things about groups of objects, e.g., "**Some men are bald.**" Aristotle treated them as subjects to be predicated in a statement, but this can lead to some silly results, like this one from Lewis Carroll's *Alice in Wonderland* ...

"I see nobody on the road," said Alice.

"I only wish I had such eyes," the King remarked in a fretful tone. "To be able to see Nobody! And at that distance too! Why, it's as much as I can do to see real people ..."

16

Frege manages to avoid this problem by treating quantifiers as logically separate entities.

He used two quantifiers: "**all**" and "**there is at least one**". This allows him to translate

"I see nobody on the road"

as either

"For all people I cannot see them on the road"

or

"There is not at least one person such that I can see them on the road".

Whilst this is no pretty solution, it does allow us to avoid Wonderland-style silliness in logic.

17

3.3.2 Ulysse est Personne

L'autre histoire est tirée de l'*Odyssée* d'Homère, au chant XI, lorsqu'Ulysse et ses marins sont faits prisonniers sur l'île des Cyclopes. Ulysse dit à Polyphème qu'il s'appelle "Personne" et ainsi, lorsque Polyphème aveuglé appelle ses compagnons à l'aide, il explique qu'il a été aveuglé par personne. Il passe ainsi pour un fou. Ulysse et ses marins peuvent ensuite s'échapper de la grotte du cyclope en se cachant sous les moutons de Polyphème qui, aveuglé, ne vérifie avec ses mains que les dessus de ses moutons.

Dans cette histoire, c'est un nom propre "Personne" qui passe pour un quantificateur. On est donc dans la situation inverse de celle d'Alice et le Roi.

3.3.3 Pour aller plus loin

Réponse$_2$: En fait la remarque précédente est expliquée par la théorie des *quantificateurs généralisés* dans (Mostowski 1957) et appliquée au langage naturel pour la première fois dans (Montague 1970).

- En un mot, il faut plutôt considérer que ce sont les noms propres qui sont des quantificateurs...
  - (Remarquez que mon petit test plus haut fonctionne aussi bien pour les quantificateurs que pour les noms propres!)
- Cette théorie des quantificateurs généralisés est beaucoup plus complexe et avancée que la logique des prédicats et ce n'est pas l'objet de ce cours.
  - Je pointe vers cette ouverture, car c'est un domaine de recherche très actif en linguistique contemporaine sur la nature et la diversité des quantificateurs que l'on trouve en langage naturel.

4 Syntaxe de la logique des prédicats

Vocabulaire: On a donc étendu le langage objet de la logique propositionnelle. Le *vocabulaire* de la logique des prédicats est le suivant:

- Les connecteurs logiques: $\neg$, $\wedge$, $\vee$ et $\rightarrow$
- Les quantificateurs: $\forall x$ et $\exists x$
- Les constantes d'individus: $a, b, c, ...$
- Les variables d'individus: $x, y, z, ...$
- Les symboles de prédicats
  - unaires: $P^1, Q^1, R^1, ...$
  - binaires: $P^2, Q^2, R^2, ...$
  - ternaires: $P^3, Q^3, R^3, ...$
  - ...

Règle de formation des formules: Les formules bien formées de la logique des prédicats sont les suivantes:

- Les *termes* de la logique des prédicats sont les suivants:
  - Toute variable x est un terme.
  - Toute constante a est un terme.
- Les *formules atomiques* de la logique des prédicats sont les suivantes:
  - Si P^n est un prédicat n-aire et $t_1, ..., t_n$ sont des termes, alors $P^n(t_1, ..., t_n)$ est une formule atomique.
- Si A et B sont des formules, alors
  - $\neg A$
  - $A \wedge B$
  - $A \vee B$
  - $A \rightarrow B$
  - $\forall x A$
  - $\exists x A$

  sont des formules.
- Rien d'autre n'est une formule.

Noms de formules:

- Une formule *close* est une formule qui ne contient *aucune variable libre*.
- Une formule *ouverte* est une formule qui n'est pas close.
- Une formule *existentielle* est une formule de la forme $\exists xA$ avec au moins une variable x libre dans A.
- Une formule *universelle* est une formule de la formel $\forall xA$ avec au moins une variable x libre dans A.

References

Austin, John (1962). *How to Do Things with Words (William James Lectures)*. Oxford University Press.

Curry, Haskell B (1952). *Leçon de logique algébrique*. Paris (Gauthier Villars) and Louvain (Nauwelaerts).

Dan Cryan Sharron Shatil, Bill Mayblin (2004). *Introducing Logic: A Graphic Guide*. 3rd ed. Icon Books. URL: http://gen.lib.rus.ec/book/index.php?md5=7744255783aa071d14dd6aa44c59a876.

Frege, Gottlob (1971). "Fonction et concept". In: *Écrits logiques et philosophiques*, pp. 80–101.

Grice, Herbert P (1975). "Logic and conversation". In: *Speech acts*. Brill, pp. 41–58. URL: https://www.communicationcache.com/uploads/1/0/8/8/10887248/logic_and_conversation.pdf.

Harrison, J.F, A. Kaiser, and J.M. VandenBrooks (2010). "Atmospheric oxygen level and the evolution of insect body size". In: *Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences, 277(1690)*. Royal Society for the Biological Sciences, pp. 1937–1946. DOI: 10.1098/rspb.2010.0001.

Montague, Richard (1970). "English as a Formal Language". In: *Linguaggi nella societa e nella tecnica*. Ed. by Bruno Visentini. Edizioni di Communita, pp. 188–221.

Mostowski, Andrzej (1957). "On a generalization of quantifiers". In: *Fundamenta Mathematicae* 44(1), pp. 12–36. DOI: 10.4064/fm-44-1-12-36.

Quine, Willard Von Orman (1972). *Méthodes de logique*. 4th ed. collection U. Armand Colin.

Récanati, François (2003). *Literalism and contextualism: Some varieties*. URL: https://jeannicod.ccsd.cnrs.fr/ijn_00000371/document.